ANTÓNIO ROBALO

Com a colaboração de

Maria do Carmo Botelho

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

Volume I
PROBABILIDADES
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

6ª Edição
Revista e Aumentada

EDIÇÕES SÍLABO

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

VOL. 1

PROBABILIDADES
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

ANTÓNIO ROBALO

com a colaboração de

Maria do Carmo Botelho

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede
www.silabo.pt

Editor: Manuel Robalo

FICHA TÉCNICA:

Título: Estatística – Exercícios – Vol. 1
Autor: António Robalo

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, 1986
6ª Edição – Lisboa, Setembro de 2017
Impressão e acabamentos: Cafilesa – Soluções Gráficas, Lda.
Depósito Legal: 430162/17
ISBN: 978-972-618-912-1

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
Fax: 218166719
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

O livro que se apresenta agora em 6ª edição teve ao longo dos anos uma aceitação notável, com várias edições e reimpressões, sinal de que terá sido útil a todos os que se confrontam com a aprendizagem da Estatística. Cumpriu assim o seu objectivo.

Nesta nova edição manteve-se a estrutura do livro, tendo-se acrescentado em cada capítulo um breve resumo teórico e alguns novos exercícios no capítulo de Inferência Estatística – Ensaios de Hipóteses.

Agradeço à minha colega, Profª. Maria do Carmo Botelho, a colaboração nas alterações verificadas, e ter assim contribuído para que esta nova edição fosse possível.

A todos os leitores e utilizadores, espero que o livro continue a ser uma preciosa ajuda nos seus estudos e preparação para as provas que tenham que prestar.

António Robalo

ÍNDICE

1

PROBABILIDADES

CONCEITOS BASE

Experiência aleatória

Pode afirmar-se que uma dada experiência é aleatória se apresentar as seguintes características:

a) O conjunto dos resultados possíveis é previamente conhecido;

b) O resultado não pode ser previsto de forma exata antes da realização da experiência.

Espaço de resultados

Define-se como o conjunto (não vazio) de resultados possíveis de uma determinada experiência aleatória, representado por Ω. Os elementos pertencentes ao espaço de resultados são usualmente representados por ω.

Acontecimento

Designa-se por acontecimento um subconjunto do espaço Ω.

Acontecimento elementar

Subconjunto do espaço de resultados formado por um único elemento.

Acontecimento complexo

Subconjunto do espaço de resultados formado por mais do que um elemento.

Acontecimento certo

Acontecimento ao qual corresponde o espaço de resultados Ω.

Acontecimento impossível

Acontecimento ao qual corresponde o conjunto vazio $\emptyset$.

União de acontecimentos

A união de acontecimentos A e B, $A \cup B$, é o acontecimento que ocorre quando pelo menos um dos acontecimentos se realiza, ou seja,

$$A \cup B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

Intersecção de acontecimentos

A intersecção de acontecimentos *A* e *B*, $A \cap B$, é o acontecimento que ocorre quando ambos os acontecimentos se realizam, ou seja,

$$A \cap B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

Acontecimentos incompatíveis ou mutuamente exclusivos

Dois acontecimentos *A* e *B* são incompatíveis ou mutuamente exclusivos se e só se a realização de um implica a não realização do outro, resultando a sua interseção num acontecimento impossível, traduzido o seu resultado por um conjunto vazio. Assim,

$$A \cap B = \varnothing$$

Diferença de acontecimentos

A diferença entre os acontecimentos *A* e *B* é o acontecimento que ocorre se e só se *A* se realiza e não se realiza *B*. Traduzido por $A - B$ ou $A \setminus B$ corresponde aos elementos de *A* que não pertencem a *B*, ou seja,

$$A - B = A \setminus B = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

Acontecimento complementar ou contrário

Caso particular da diferença de dois acontecimentos *A* e *B* em que *A* coincide com o espaço de resultados. O resultado da diferença pode ser traduzido por

$$\Omega - B = \overline{B} = \{\omega : \omega \in \Omega \wedge \omega \notin B\}$$

Propriedades das operações sobre acontecimentos

- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
- Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- Distributividade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$.
- Idempotência: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
- Lei do complemento: $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \Omega = A$.
- Elemento absorvente: $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Probabilidades

Medida de probabilidade

A medida de probabilidade é uma função P que a cada acontecimento A, contido no espaço de resultados $(A \subseteq \Omega)$ faz corresponder um número real, a probabilidade do acontecimento A, $P[A]$, que verifica os três axiomas:

i) $P[A] \geq 0$.

ii) $P[\Omega] = 1$.

iii) Se A e B forem incompatíveis ou mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

Teoremas

1. $P[\bar{A}] = 1 - P[A]$.
2. $P[\varnothing] = 0$.
3. $P[B - A] = P[B] - P[A \cap B]$.
4. $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.
5. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P[A] \leq P[B]$.
6. $P[A] \leq 1$.

Probabilidade condicionada

Considerando dois acontecimentos A e B, a probabilidade de A sabendo que B já se realizou designa-se por $P[A \mid B]$ e é definida por

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} \quad \text{se} \quad P[B] > 0.$$

Partições do espaço de resultados

Considera-se que a classe de acontecimentos $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots\}$ é uma partição de Ω quando:

$$\cup_i A_i = \Omega.$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

$$P[A_i] > 0 \quad i = 1, 2, \ldots$$

Probabilidade total

Seja $\{A_1,\ A_2,\ldots,A_m,\ldots\}$ uma partição de Ω e $P[A_j]>0\ \ (j=1,2,\ldots,m,\ldots)$, então para qualquer acontecimento B tem-se

$$P[B]=\sum_{j=1} P[A_j]\ P[B\mid A_j]\ .$$

Teorema de Bayes

Seja $\{A_1,\ A_2,\ldots,A_m,\ldots\}$ uma partição de Ω e $P[A_j]>0\ (j=1,2,\ldots,m,\ldots)$, então para qualquer acontecimento B, com $P[B]>0$,

$$P[A_j\mid B]=\frac{P[A_j]\ P[B\mid A_j]}{\sum_{i=1} P[A_i]\ P[B\mid Ai]}\,,\quad j=1,2,\ldots,m,\ldots$$

1

PROBABILIDADES

ENUNCIADOS

EXERCÍCIO 1

Considere o lançamento de um dado.

a) Represente Ω – espaço de resultados.

b) Indique os acontecimentos que fazem parte de *A* – álgebra de acontecimentos.

EXERCÍCIO 2

Sejam *A*, *B*, *C* três acontecimentos associados a uma experiência aleatória.

Exprima em notação de acontecimentos:

a) Ao menos um dos acontecimentos ocorre.

b) Apenas o acontecimento *A* ocorre.

c) Exactamente um dos acontecimentos ocorre.

d) Exactamente dois dos acontecimentos ocorrem.

e) Não mais de dois acontecimentos ocorrem simultaneamente.

EXERCÍCIO 3

Prove que

$$\forall A_1, A_2 \in \Omega: \; A_1 = (A_2 \cap A_1) \cup [A_1 / (A_2 \cap A_1)]$$

EXERCÍCIO 4

Considere o tempo de vida de certo dispositivo eletrónico, (em horas).

Admita $\Omega: \{t: t > 0\}$

Sejam $A = \{t: t > 800\}$

$B = \{t: 600 < t < 1000\}$

$C = \{t: t < 700\}$

Descreva: $A \cup B$ $A \cap B$ $\overline{B}$

$A \cup C$ $A \cap C$

$B \cup C$ $B \cap C$ $\overline{C}$

EXERCÍCIO 5

Durante um período de 8 horas, em dado momento *X*, um dispositivo é posto na posição *ON*. Posteriormente, em dado momento *Y* (ainda durante o mesmo período de 8 horas) é reposto na posição *OFF*.

a) Descreva o espaço amostral.

(Sugestão – Suponha *X* e *Y* medidos em horas, no plano *XY* com origem representando o início do período)

b) Descreva os seguintes acontecimentos:

1. O dispositivo está ligado pelo máximo de uma hora.
2. O tempo em que permanece ligado é o dobro do tempo em que permanece desligado.

EXERCÍCIO 6

As peças que saem de uma linha de produção são marcadas defeituosas (*D*) ou não defeituosas (*N*).

As peças vão sendo inspeccionadas e registradas, procedendo-se a uma paragem quando se obtenham duas peças defeituosas consecutivas ou quando se tenham registrado quatro peças.

Descreva o espaço de resultados desta experiência.

EXERCÍCIO 7

Dados os seguintes valores obtidos na cidade *X*:

Escalão	Rendimento (u.m.) familiar	N.º de famílias
1	Menos de 10.000	500
2	10.000 – 20.000	1.000
3	0.000 – 30.000	1.500
4	30.000 – 50.000	1.600
5	50.000 ou mais	400

Indique qual a probabilidade de uma família escolhida ao acaso nessa cidade:

a) Ter um rendimento inferior a 10.000 u.m.

b) Ter um rendimento entre 10.000 a 30.000 u.m.

c) Ter um rendimento inferior a 10.000 u.m. ou superior a 50.000 u.m.

d) Que conceito de probabilidade utilizou?

EXERCÍCIO 8

Duas pessoas *A* e *B*, resolvem encontrar-se em certo local entre as 12 h e as 13 h.

A primeira a chegar espera 20 minutos, após o que deixa o local.

Qual a probabilidade de *A* e *B* se encontrarem, se as chegadas de cada uma das pessoas ocorrem ao acaso e forem independentes uma da outra? (Isto é, a hora da chegada de uma das pessoas não afecta a hora de chegada da outra).

EXERCÍCIO 9

Numa entrevista, um economista afirmou que considerava a «melhoria» da situação económica tão provável como a sua «estagnação». No entanto encarava a «melhoria» como duas vezes mais provável que a «quebra» da actividade económica.

a) Que espaço de resultados está implícito nestas afirmações?

b) Qual a probabilidade associada a cada resultado deste espaço?

c) Que conceito de probabilidade está implícito neste problema? Justifique.

EXERCÍCIO 10

Considere o lançamento de uma moeda por duas vezes. Qual a probabilidade de saída de pelo menos uma caravela?

EXERCÍCIO 11

Lançam-se dois dados ao ar.

a) Qual a probabilidade de obter uma soma de 7?

b) E uma diferença (absoluta) de 2?

R: *a)* 6/36 ; *b)* 8/36.

EXERCÍCIO 12

Sendo A e B dois acontecimentos tais que

$$P[A] = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P[A \cup B] = \frac{1}{2} \quad \text{calcule} \quad P[B \cap \overline{A}]$$

R: $\frac{1}{6}$.

EXERCÍCIO 13

Se A e B são dois acontecimentos não mutuamente exclusivos e C é um acontecimento definido como:

$$C = B \cap \overline{A}$$

Prove que

$$P[C] = P[A \cup B] - P[A]$$

Exercício 14

Suponha que *A*, *B* e *C* são acontecimentos tais que:

$P[A] = P[B] = P[C] = 1/4$

$P[A \cap B]\ P[C \cap B] = 0$

$P[A \cap C] = 1/8$

Calcule a probabilidade de que ao menos um dos acontecimentos (*A*, *B* ou *C*) ocorra.

Exercício 15

Sendo *A*, *B* e *C* acontecimentos tais que:

$A \cup B \cup C = \Omega$

$P[a] = 0{,}3 \qquad P[\overline{B}] = 0{,}7 \qquad P[C] = 0{,}5$

$A \cap B = \varnothing \qquad C \cap B = \varnothing$

Determine $P[A \cap C]$.

R: 0,1.

Exercício 16

Pretende-se calcular o custo de um suporte metálico composto por 3 peças: *A*, *B* e *C*.

Sabe-se que o custo, em milhares de escudos, da peça *A* pode ser 1,4 ou 1,5; o da peça *B* pode ser 2,8 ou 2,9 ou 3 e o da peça *C* pode ser 0,7 ou 0,8.

Supôe-se que os custos indicados para cada peça são equiparáveis. Qual a probabilidade de o custo do suporte exceder 5,1 contos?

EXERCÍCIO 17

Sejam dois acontecimentos A e B, de probabilidade respectivamente 3/4 e 1/2. Podem estes dois acontecimentos serem incompatíveis? Justifique.

EXERCÍCIO 18

Três atletas participam numa prova. A probabilidade de o atleta A ganhar é duas vezes maior que a do atleta B ganhar, e esta duas vezes maior que a de C.

Qual a probabilidade de cada um dos atletas ganhar a prova?

EXERCÍCIO 19

Segundo certa empresa de estudos de mercado, a preferência da população de uma cidade pelas 3 marcas existente (A, B e C) de um produto de grande consumo, é dada pelos seg. valores (percentagens sobre o total da população):

Consumidores de A: 51	Consumidores de A e B: 28
Consumidores de B: 62	Consumidores de A e C: 21
Consumidores de C: 40	Consumidores de B e C: 24

Consumidores de A, B e C simultaneamente: 10

Qual a probabilidade de que uma pessoa tomada ao acaso nessa cidade, seja consumidora:

a) das marcas A ou B;
b) somente de A e C;
c) somente de C;
d) de pelo menos uma das marcas;
e) de nenhuma delas.

Exercício 20

Dum lote de 100 peças, das quais 20 são defeituosas e 80 perfeitas, escolheu-se uma amostra de 10 peças.

Qual a probabilidade de achar 3 defeituosas e 7 perfeitas?

Exercício 21

Qual a probabilidade de que uma mão de 13 cartas (retirada de um baralho de 52):

a) contenha exactamente 6 espadas?
b) contenha pelo menos 2 ases?

Exercício 22

Sabendo que $P[A] = 0{,}3$, $P[B] = 0{,}5$ e $P[A \cup B] = 0{,}6$ determine:

a) $P[A/B]$ e $P[\overline{A}/B]$

b) $P[B/A]$ e $P[\overline{B}/A]$

R: *a)* $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; *b)* $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$.

Exercício 23

Dois partidos (A e B) apresentam-se a uma eleição. Na opinião de um especialista, as intenções de voto dos eleitores distribuir-se-iam de acordo como seg. quadro de probabilidade conjunta:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0,25	0,10	0,10
A_2	0,10	0,10	0,15
A_3	0,05	0,15	0

onde A_1, A_2 e A_3 indicam respectivamente, estrato social baixo, médio e alto do eleitor e B_1, B_2 e B_1 a intenção de voto no partido *A*, no partido *B* e abstenção, respectivamente.

Indique e interprete os valores de:

a) $P[A_1 \cap B_1]$ e $P[A_1 \cap B_2]$

b) $P[A_1]$, $P[A_2]$ e $P[A_3]$
$P[B_1]$, $P[B_2]$ e $P[B_3]$

c) $P[B_1 / A_1]$, $P[B_2 / A_1]$ e $P[B_3 / A_1]$
$P[A_1 / B_2]$, $P[A_2 / B_2]$ e $P[A_3 / B_2]$

R: *a)* 0,25 , 0,10 ; *b)* 0,45 , 0,35 ; 0,20*;* 0,40 , 0,35 ; 0,25.

c) $\frac{5}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$.

Exercício 24

Suponha que: $P[A] = 0{,}4 \quad P[B] = 0{,}3 \quad P[C] = 0{,}7$

$$P[\bar{A} \cap B] = 0{,}1 \quad \text{e} \quad P[A \cap B \cap \bar{C}] = 0{,}1$$

Calcule $P[C / A \cap B]$

R: $\frac{1}{2}$.

Exercício 25

De 20 declarações de contribuição industrial, sabe-se que 8 apresentam erros.

a) Se um fiscal seleccionar ao acaso 2 para verificação, qual a probabilidade de essas duas conterem erros?

b) Se seccionar 3, qual a probabilidade de pelo menos 2 conterem erros? (Sugestão: utilize um diagrama de árvore e o conceito de probabilidade condicionada)

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

Volume I
PROBABILIDADES
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

António Robalo
Professor Catedrático
ISCTE Business School – ISCTE-IUL

Maria do Carmo Botelho
Professora Auxiliar
Escola de Sociologia e Políticas Públicas – ISCTE-IUL
Investigadora CIES-IUL

Exercícios propostos e resolvidos. O cuidado posto na selecção e apresentação dos exercícios faz deste livro um elemento indispensável a uma boa compreensão e consolidação dos conhecimentos teóricos adquiridos.

As resoluções encontram-se explicadas passo a passo e com o respectivo enquadramento teórico.

Sínteses teóricas em todos os capítulos constituem uma mais valia adicional nesta sexta edição.

ISBN 978-972-618-912-1
9 789726 189121
116