19

MATEMÁTICA

FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA

COM PYTHON 3 E R

F. CORREIA DOS SANTOS • JORGE DUARTE • NUNO D. LOPES

2ª Edição

Revista e Ampliada

Coleção Matemática

EDIÇÕES SÍLABO

COLEÇÃO MATEMÁTICA

19

COLEÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n

3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS

4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA

5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

8 – CÁLCULO INTEGRAL EM IR – PRIMITIVAS

9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS

10 – SUCESSÕES E SÉRIES

11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR

13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS

14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS

16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES

17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS

18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA – Com Python 3 e R

20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação

21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações

22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos

23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n

24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS

25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais

26 – ÁLGEBRA LINEAR – Teoria e Prática

Fundamentos de Análise Numérica

com Python 3 e R

F. Correia dos Santos

Jorge Duarte

Nuno D. Lopes

2ª Edição
Revista e Ampliada

EDIÇÕES SÍLABO

FICHA TÉCNICA

Título: Fundamentos de Análise Numérica – Com Python 3 e R
Autores: F. Correia dos Santos, Jorge Duarte, Nuno D. Lopes

Capa: Pedro Mota

1.ª Edição – Lisboa, outubro de 2002
2.ª Edição – Lisboa, março de 2019
Impressão e acabamentos: VASP
Depósito Legal: 453638/19
ISBN: 978-989-561-003-7

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

Lista de Programas

Prefácio da 1ª edição

Este texto resulta da experiência do autor como professor da cadeira de ANÁLISE NUMÉRICA do Curso de Engenharia Química do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa (ISEL), a par de actividade na Indústria com uma forte componente de aplicação de Métodos Numéricos e Estatísticos e sua implementação informática.

Este livro é dedicado aos alunos que irão contactar, pela primeira vez, com a disciplina de Análise Numérica (ou Métodos Numéricos), sacrificando-se, aqui e além, algum formalismo pela clareza e leveza de exposição, sempre que o rigor matemático não seja afectado.

Pretendeu-se um equilíbrio entre uma exaustiva sucessão de definições, teoremas e demonstrações, e uma listagem de algoritmos e exercícios resolvidos. Cada capítulo é iniciado com uma introdução, na qual se faz a sua apresentação, terminando com uma secção - "Um passo adiante..." - na qual se procura abrir horizontes para estudos posteriores.

No texto existem exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos: os primeiros devem ser estudados como parte integrante do texto; os segundos são aplicações detalhadas que o leitor pode tratar como um exemplo ou tentar a sua resolução para comparação posterior da metodologia utilizada; relativamente aos terceiros, aconselha-se o leitor a responder ao desafio da sua resolução, no contexto em que são propostos.

Na parte final do livro, o leitor pode encontrar um conjunto adicional de 162 exercícios, com soluções, de nível igual ou superior aos resolvidos no texto; os exercícios propostos assinalados com um asterisco (*) dizem respeito às matérias sumariamente apresentadas nas secções "Um passo adiante...".

Pretende-se que o aluno veja o interesse prático desta cadeira e faça um estudo bem apoiado nos conhecimentos matemáticos já adquiridos, pelo que são incluídos 14 anexos nos quais se pode encontrar:

a) resumos de conceitos básicos de disciplinas afins, como Análise Matemática e Álgebra Linear, fundamentais para alicerçar os conhecimentos a adquirir no âmbito da Análise Numérica;
b) demonstrações de alguns resultados, de estudo não indispensável, considerados interessantes para a formação do aluno.

Ao longo do texto, o leitor é encaminhado para obras referenciadas na bibliografia, para a demonstração de alguns resultados particulares ou desenvolvimentos propostos.

Agradecimentos da 1ª edição

A todos os alunos, os quais, seguramente, não tiveram tanto prazer em assistir às aulas como o autor em as proferir; espero, porém, que a “diferença”, embora positiva, seja pequena, e que a sucessão dessas diferenças não seja crescente.

Ao aluno, desconhecido, que acidentalmente fez a Sílabo saber que possuía e prezava uns apontamentos das aulas de Análise Numérica ministradas pelo autor.

À Prof. Olga Baptista que estabeleceu a ponte entre o editor e o autor deste texto, sendo a primeira pessoa a incentivar fortemente a sua realização.

A todos os colegas da secção de Matemática do Curso de Engenharia Química de quem recebi total apoio e sugestões. Uma justa menção para a Prof. Isabel Santinho, não só pelas sugestões dadas, mas também pelos muitos anos em que alternámos a responsabilidade da cadeira de Análise Numérica, estabelecendo e alterando o programa da cadeira, de modo a que este fosse bem fundamentado e útil a um profissional de engenharia; este texto é também o fruto desse trabalho.

À minha filha Susana um agradecimento muito especial e pleno de significado, pela crítica, discussão acalorada e excelentes sugestões referentes a diversos capítulos deste texto.

À Sílabo, nas pessoas do Dr. Manuel Robalo e Sr. Pedro Mota, pelo excelente relacionamento, colaboração e soluções gráficas apresentadas que, seguramente, serão uma forte mais-valia a acrescentar ao texto.

O autor assume-se como o único responsável por qualquer eventual erro, omissão, gralha, incorrecção e outras quaisquer doenças, mais ou menos graves, que este livro possa enfermar.

Lisboa, Outubro de 2002
Fernando Manuel Correia dos Santos

Prefácio da 2ª edição

Passados 17 anos sobre a 1ª edição deste livro, queremos apresentar um rejuvenescimento da obra, com mais autores, mais jovens, combinando eficazmente as experiências de docência da cadeira de ANÁLISE NUMÉRICA do Curso de Engenharia Química do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa com as aplicações práticas de Métodos Numéricos e Estatísticos e sua implementação informática. Esta 2ª edição é substancialmente diferente da 1ª edição em duas vertentes notórias:

- Alargamento significativo do conteúdo no que respeita à Álgebra Linear Numérica e Equações Diferenciais e, de forma mais pontual, na interpolação, derivação e integração numérica.
- Opção pela implementação dos métodos numéricos em Python 3 e R, já que estas linguagens de programação, bem actuais, possuem uma sintaxe amigável, praticamente tão clara como o pseudocódigo anteriormente usado, ficando os algoritmos perfeitamente acessíveis a qualquer leitor com formação, mesmo rudimentar, de programação.

Pretendeu-se conservar o espírito inicial desta obra: uma exposição da teoria de forma fundamentada e clara, intercalada com numerosos exemplos e exercícios resolvidos, dando suporte aos algoritmos dos 82 programas bilingues (Python 3 e R) apresentados e prontos a utilizar; salienta-se que o texto não pretende ser um curso de programação, pelo que algumas vezes se optou pela clareza do código com algum sacrifício na sua eficiência. Será que o duplo objectivo, fundamentação e clareza, foi conseguido? – o leitor será o juiz, já que esta obra lhe é dedicada.

Agradecimentos da 2ª edição

Mantendo os agradecimentos às personalidades e instituições referidas na 1ª edição, em outubro de 2002, recordamos, com saudade, a Prof. Isabel Santinho que seguramente gostaria de ver esta 2ª edição.

À Professora Cristina Januário e ao Professor Nuno Martins pela sua amizade e incentivo.

O presente trabalho é o fruto de largos meses de uma excelente colaboração entre os três autores, em que cada um de nós reconhece e agradece a dedicação, o entusiasmo e a generosidade manifestada pelo grupo.

F. Correia dos Santos
Jorge Duarte
Nuno D. Lopes

Lisboa, março de 2019

Capítulo 1
Números

1.1. Introdução

O que é a Análise Numérica?

Qual a utilidade da Análise Numérica?

Em 1947, nos EUA, a designação "Análise Numérica" foi apresentada à comunidade científica, com "Pompa e Circunstância", quando da criação do "Institute of Numerical Analysis" associado à Universidade da Califórnia.

O objetivo fundamental da Análise Numérica é a resolução de problemas matemáticos, que pedem um resultado numérico, usando as operações aritméticas mais simples, podendo o resultado ser exato ou aproximado, devendo, neste último caso, haver indicação quantitativa sobre o erro cometido; por exemplo, é possível calcular, usando Métodos Numéricos, um valor aproximado de um integral definido sem calcular uma primitiva da função integranda e controlar a diferença entre o valor determinado e o valor real.

Tal como seria indesculpável o recorrer a uma máquina de calcular para achar a soma de 2 com 3, a Análise Numérica não pode servir para esconder a ignorância matemática, que se revelaria em usar métodos numéricos na resolução da equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

ou no cálculo do integral

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x,$$

ou, ainda, na determinação dos valores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

A designação Análise Numérica é hoje bastante abrangente, não estando contemplados apenas os Métodos Numéricos aplicados à Análise Matemática e Cálculo, mas também Álgebra Linear Numérica, Otimização Numérica, Computação Numérica, enfim, espalha-se por vastos domínios da Matemática.

O grande desenvolvimento deste ramo das Ciências Matemáticas, nos últimos 50 anos, está fortemente ligado à evolução e sobretudo à vulgarização dos computadores e máquinas de calcular, ferramentas base de trabalho para longos e fastidiosos cálculos com números, que "à mão" seriam virtualmente impossíveis de realizar.

Os processos de cálculo sequencial, que permitem passar dos dados aos resultados, são os Algoritmos da Análise Numérica; o ITEE, acrónimo de Institute of Electrical and Electronics Engineers, define o conceito de Algoritmo, numa tradução quase literal, como

> *"Um conjunto finito de regras bem definidas, que, num número finito de passos, levam à solução de um problema ou mostram a ausência dessa solução."*

Esta definição engloba, não só os métodos de cálculo manual, mas também aqueles que dão origem a um programa de computação numérica, isto é, um processo de cálculo implementado numa linguagem de programação, a qual tem aqui um papel bem subalterno.

Assim, perante um problema de cálculo numérico, o "analista" numérico deve proceder a

a) Desenvolvimento de algoritmos: estabelecer métodos de cálculo que conduzam à solução do problema;

b) Análise dos algoritmos: comparação dos algoritmos desenvolvidos, no que respeita a
   - Eficiência: facilidade de implementação e rapidez;
   - Exatidão: minimização dos erros, pois

$$\begin{aligned}&\text{Erros nos dados + Erros inerentes do algoritmo+}\\ &\qquad\qquad + \text{Erros inerentes dos instrumentos de cálculo = Erros no resultado;}\end{aligned}$$

c) Implementação do algoritmo no computador: tradução do algoritmo numa linguagem de programação, devendo ser escolhida aquela que melhor se adapte ao algoritmo selecionado.

Ao longo do texto serão estabelecidos muitos algoritmos, os quais serão implementados em **Python 3** e **R**, linguagens de programação de alto nível com uma sintaxe amigável, em alternativa ao pseudo-código utilizado na 1ª edição deste livro.

> **Nota 1.1.1:** Em concordância com a normalização portuguesa o separador decimal é a vírgula "," , pelo que, em princípio, neste texto escreveremos 4,23 e não 4.23; porém, usaremos o separador "." – por exemplo 4,23 – sempre que haja conflito visual com a vírgula ortográfica. Um intervalo real $[a, b]$ poderá ser representado, por exemplo, como [4,23; 5,67] ou [4.23, 5.67].

Programas 1.1.1. Problema "inocente":

Vamos enunciar um problema "inocente"e propor algoritmos que levem à sua solução.

Um professor distribui frequentemente textos de apoio aos seus alunos e pretende estabelecer um algoritmo que lhe forneça o número de folhas consumidas em cada entrega; o algoritmo deve ser testado considerando 30 alunos e um texto de 5 folhas.

Nos programas seguintes comparam-se algoritmos (funções) para a resolução do problema específico apresentado.

- alu: número de alunos;
- fol: número de folhas em cada caderno;
- tot: número total de folhas consumidas.

Python: Multiplicativo

```
def fun01(alu, fol):
    tot=alu*fol
    return tot
```

Python: Aditivo 1

```
def fun02(alu, fol):
    tot=0
    for i in range(0, alu):
        tot=tot+fol
    return tot
```

Python: Aditivo 2

```
def fun03(alu, fol):
    tot=0
    for i in range(0, fol):
        tot=tot+alu
    return tot
```

Python: Aditivo 3

```
def fun04(alu, fol):
    tot=0
    contador=1
    while(contador<=alu):
        tot=tot+fol
        contador=contador+1
    return tot
```

R: Multiplicativo

```
fun01=function(alu, fol){
    tot=alu*fol
    return(tot)
    }
```

R: Aditivo 1

```
fun02=function(alu, fol){
    tot=0
    for(i in 1:alu){
        tot=tot+fol   #(a)
    }
    return(tot)
}
```

R: Aditivo 2

```
fun03=function(alu, fol){
    tot=0
    for(i in 1:fol){
        tot=tot+alu #(b)
    }
    return(tot)
}
```

R: Aditivo 3

```
fun04=function(alu, fol){
    tot=0
    contador=1
    while(contador<=alu){
        tot=tot+fol #(a)
        contador=contador+1
    }
    return(tot)
}
```

Python: Aditivo 4

```
def fun04alt(alu, fol):
    tot=0
    contador=0
    while(contador<alu):
        contador=contador+1
        tot=tot+fol
    return tot
```

R: Aditivo 4

```
fun04alt=function(alu, fol){
    tot=0
    contador=0
    while(contador<alu){
        contador=contador+1
        tot=tot+fol #(a)
    }
    return(tot)
}
```

Python: Aditivo 5

```
def fun05(alu, fol):
    tot=0
    contador=0
    while True:
        contador=contador+1
        if(contador>alu):
            break
        tot=tot+fol
    return tot
```

R: Aditivo 5

```
fun05=function(alu, fol){
    tot=0
    contador=0
    while(TRUE){
        contador=contador+1
        if(contador>alu){
            break
        }
        tot=tot+fol #(a)
    }
    return(tot)
}
```

- #(a): o professor constrói tantos cadernos quantos alunos e distribui, numa volta, um caderno a cada aluno;
- #(b): o professor faz uma volta distribuindo a primeira folha a cada aluno, depois outra volta para a segunda folha, e assim sucessivamente até completar o caderno a todos os alunos.

Todos os algoritmos (funções) apresentados são aditivos, exceto o fun01(), multiplicativo, que é o mais simples, natural e económico em esforço computacional.

Python: Multiplicativo

```
>>> fun01(30, 5)
150
```

R: Multiplicativo

```
> fun01(30, 5)
[1] 150
```

A função fun02() conduz a uma soma de 30 parcelas todas iguais a 5, enquanto fun03() resolve o problema com uma soma de 5 parcelas todas iguais a 30.
Os restantes algoritmos são semelhantes a fun02(), usando outras estruturas de repetição; os algoritmos aditivos, na resolução deste problema, representam aquilo a que podemos chamar “complicar o que é fácil”, tendência perigosa, que se pretende não ter lugar neste livro, tentando pelo contrário “tornar um pouco mais fácil o que na realidade seja um pouco mais complicado”.
Todos os algoritmos retornam um consumo total de 150 folhas, quando executado o teste solicitado: os dados do problema são exatos, os algoritmos são exatos, a aritmética é exata, logo o resultado é seguramente exato.

FERNANDO MANUEL CORREIA DOS SANTOS, é Licenciado em Engenharia Químico-Industrial pelo Instituto Superior Técnico e Professor Adjunto, equiparado, da Área de Matemática do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. A par da atividade docente exerceu funções de direção em empresas do setor da Metalurgia, em áreas diversas como Produção, Controlo de Qualidade, Direção Fabril e Investigação e Desenvolvimento, e também de consultadoria nas áreas de Projeto, Gestão Industrial e implementação de Sistemas de Garantia da Qualidade (ISO 9000). As duas atividades, docente e industrial, sempre foram complementares, analisando na Escola os problemas interessantes surgidos na Indústria, e desenvolvendo aplicações para esta última, normalmente com suporte informático, usando os métodos matemáticos, numéricos e estatísticos, ensinados na primeira. Atualmente, na situação de aposentado, a Matemática e a Computação continuam a ser fiéis companheiras, com interesse na Análise Inteligente de Dados.

JORGE DAS NEVES DUARTE é Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Mestre em Matemática Aplicada pelo Instituto Superior Técnico, tendo concluído o seu doutoramento em Matemática em 2006. É Professor Adjunto na Área Departamental de Matemática do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa. No âmbito da sua investigação, tem como interesses científicos a Teoria das Equações Diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos. Trabalhando num contexto verdadeiramente interdisciplinar, é Membro do Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos (Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa) e membro da *European Society of Mathematical and Theoretical Biology*, mantendo uma sólida colaboração com colegas investigadores de diferentes áreas disciplinares em diversas instituições internacionais.

NUNO DAVID DE JESUS LOPES é Licenciado e Mestre em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e é Doutor em Matemática, com especialização em Análise Numérica, pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. É Professor Adjunto na Área Departamental de Matemática do ISEL (Instituto Superior de Engenharia de Lisboa). No âmbito da sua investigação, tem como interesses científicos métodos analíticos e numéricos do tipo Elementos Finitos para o estudo de modelos baseados em Equações Diferenciais com Derivadas Parciais. Desenvolve colaborações com membros de vários centros de investigação e, recentemente, tem desenvolvido o seu trabalho em temas da Matemática Industrial.

O objetivo deste livro, com uma forte preocupação pedagógica de clareza na exposição, é a apresentação de alguns conceitos fundamentais de Análise Numérica, numa vertente teórico-prática, em que o desenvolvimento da teoria é intercalado com numerosos exemplos e exercícios resolvidos de modo a bem consolidar os conhecimentos adquiridos, sendo estes aplicados de imediato no desenvolvimento de algoritmos e sua implementação nas linguagens de programação Python 3 e R.

Pretende-se que o leitor aborde a Análise Numérica de uma forma fortemente apoiada na Análise Matemática e Álgebra Linear, pelo que se englobam alguns anexos referentes a conhecimentos considerados indispensáveis, bem como uma vasta e rica bibliografia geral.

168

ISBN 978-989-561-003-7

9 789895 610037

19 COLEÇÃO MATEMÁTICA