ANTÓNIO ROBALO

Com a colaboração de
Maria do Carmo Botelho

ESTATÍSTICA
EXERCÍCIOS

Volume II
DISTRIBUIÇÕES
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

6ª Edição
Revista e Aumentada

EDIÇÕES SÍLABO

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

VOL. 2

DISTRIBUIÇÕES
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

ANTÓNIO ROBALO

com a colaboração de

Maria do Carmo Botelho

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede
www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Estatística – Exercícios – Vol. 2
Autor: António Robalo

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, 1986
6ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2018
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 430162/17
ISBN: 978-972-618-936-7

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

O livro que se apresenta agora em 6ª edição teve ao longo dos anos uma aceitação notável, com várias edições e reimpressões, sinal de que terá sido útil a todos os que se confrontam com a aprendizagem da Estatística. Cumpriu assim o seu objectivo.

Nesta nova edição manteve-se a estrutura do livro, tendo-se acrescentado em cada capítulo um breve resumo teórico e alguns novos exercícios no capítulo de Inferência Estatística – Ensaios de Hipóteses.

Agradeço à minha colega, Profª. Maria do Carmo Botelho, a colaboração nas alterações verificadas, e ter assim contribuído para que esta nova edição fosse possível.

A todos os leitores e utilizadores, espero que o livro continue a ser uma preciosa ajuda nos seus estudos e preparação para as provas que tenham que prestar.

António Robalo

ÍNDICE

1

DISTRIBUIÇÕES

Variáveis Aleatórias Discretas

CONCEITOS BASE

Distribuição uniforme

Seja X uma variável aleatória discreta de domínio $D = \{x_1, \; x_2, \ldots, x_N\}$. Considera-se que X segue uma distribuição Uniforme nos N pontos x_j, com $j = 1, 2, \ldots, N$ se e só se a função de probabilidade de X for dada como

$$f(x_j) = \frac{1}{N}, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

A correspondente função distribuição da variável X vem

$$F(X) = P[X \leq x] = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{x_i}{N} & x_i \leq x < x_{i+1}, \; x_i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ 1 & x \geq N \end{cases}$$

O valor esperado e a variância de X são dados respetivamente por

$$E[X] = \frac{N+1}{2}, \quad Var[X] = \frac{N^2 - 1}{12}$$

Distribuição de Bernoulli

Prova de Bernoulli

Experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis: A – sucesso e $\bar{A}$ – insucesso, com probabilidades respetivamente de $P[A] = p$ e $[\bar{A}] = 1 - p = q$.

Diz-se que X é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Bernoulli, $X \sim B(1;\, p)$, quando a sua função de probabilidade é dada por

$$P[X = x] = f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad (0 \leq p \leq 1).$$

A função de distribuição de X é traduzida pela expressão

$$P[X \leq x] = F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Numa distribuição de Bernoulli, o valor esperado e a variância de X são dados por

$$E[X] = p, \; Var[X] = p \cdot (1 - p)$$

Distribuição binomial

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição binomial, $X \sim B(x; n; p)$, possível de identificar como X – número de sucessos numa sequência de n provas de Bernoulli. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

com $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ e $0 \le p \le 1$.

A função distribuição surge como

$$P[X \le x] = F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{x_i = 0}^{x} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{n - x_i} & 0 \le x \le n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

a variável aleatória contínua tem como contradomínio um conjunto infinito não numerável de valores.

O valor esperado e a variância de uma variável X com distribuição binomial podem determinar-se como

$$E[X] = n \cdot p, \quad Var[X] = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Teorema: Aditividade da distribuição binomial

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas, em que $X_1 \sim B(n_1; p)$ e $X_2 \sim B(n_2; p)$, então $X_1 + X_2 \sim B(n; p)$, com $n = n_1 + n_2$.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson está associada a uma contagem, cujo processo aproximado, de parâmetro $\lambda > 0$, verifica as seguintes condições:

i) O número de eventos que ocorrem em intervalos não sobrepostos são variáveis aleatórias independentes.

ii) A probabilidade de existir apenas um evento em qualquer intervalo de tempo de amplitude Δt aleatoriamente pequena é de cerca $\lambda \Delta t$.

iii) A probabilidade de se verificarem dois ou mais eventos em qualquer intervalo de tempo de amplitude Δt aleatoriamente pequena é aproximadamente zero.

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de Poisson, $X \sim P(x;\lambda)$, a sua função de probabilidade é definida como

$$P[X = x] = f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,\ 1,\ 2, \ldots (\lambda > 0).$$

O valor esperado a variância para uma distribuição de Poisson são dados como

$$E[X] = \lambda, \quad Var[X] = \lambda.$$

Teorema: Aditividade da distribuição de Poisson

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas, em que $X_1 \sim P(\lambda_1)$ e $X_2 \sim P(\lambda_2)$, então $X_1 + X_2 \sim P(\lambda)$, com $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Teorema: Aproximação da distribuição binomial à distribuição de Poisson

A distribuição binomial converge para a distribuição de Poisson quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, considerando $\lambda = n \cdot p$.

1

DISTRIBUIÇÕES

Variáveis Aleatórias Discretas

ENUNCIADOS

Exercício 1

Uma empresa comercializa garrafas de vinho do Porto de 1 litro. Supõe-se no entanto que 40% dessas garrafas, contém realmente uma menor quantidade de líquido do que o volume indicado no rótulo.

Tendo adquirido 6 dessas garrafas, qual a probabilidade de:

a) Duas delas conterem menos de um litro?

b) No máximo 2 conterem menos de um litro?

c) Pelo menos 2 conterem menos de um litro?

d) Todas conterem menos de um litro?

e) Todas conterem o volume o volume indicado no rótulo?

f) Represente a função de probabilidade de V.A. em questão.

g) E qual a probabilidade de nas 100 garrafas existentes num supermercado, haver não mais de 30 com volume inferior ao indicado no rótulo?

Exercício 2

Qual a probabilidade de, em 10 lançamentos de um dado perfeito:

a) Se obterem 5 faces par.

b) Se obterem 5 faces superiores a 4.

Exercício 3

Represente graficamente a função de probabilidade de cada uma das variáveis com distribuição binomial, identificadas pelos seguintes valores dos parâmetros n e p:

a) $n = 5$ $p = 0{,}5$

b) $n = 5$ $p = 0{,}25$

c) $n = 5$ $p = 0{,}05$

d) $n = 5$ $p = 0{,}75$

e) $n = 20$ $p = 0{,}5$

f) $n = 20$ $p = 0{,}25$

g) $n = 20$ $p = 0{,}05$

EXERCÍCIO 4

Suponha que X tem distribuição binomial, com parâmetros n e p; sabendo que $E[X] = 5$ e $VAR[X] = 4$, determine n e p.

EXERCÍCIO 5

Admite-se ser de 0,4 a probabilidade de que um cliente que entre no supermercado *M*, realize despesa superior a 200€.

a) Qual a probabilidade de, em 3 clientes:
— nenhum realizar despesas superior a 200€?
— no mínimo, 2 gastarem mais de 200€?

b) Qual a probabilidade de, em 15 clientes:
— nenhum realizar despesa superior a 200€?
— no mínimo 2 gastarem mais de 200€?

EXERCÍCIO 6

Um estudante tem 3 exames. A probabilidade de ficar bem em cada um é de $\frac{1}{2}$. Calcule a probabilidade de ficar bem,

a) em pelo menos 1 exame.
b) em exactamente 1 exame.

EXERCÍCIO 7

Se for estimada em 0,3 a probabilidade de uma pessoa contactada realizar uma compra, calcule a probabilidade de um vendedor que visita num dia 6 pessoas:

a) realizar 5 vendas.
b) realizar entre 4 e 8 vendas.
c) realizar quanto muito 2 vendas.
d) realizar no máximo 10 vendas.
e) realizar pelo menos 12 vendas.
f) realizar no mínimo 3 vendas.

nas 16 pessoas visitadas pelo vendedor:

g) 25% realizarem compras.

h) Seja de 0,5 a proporção das que realizam compras.

i) Continuando o vendedor a visitar 16 pessoas diariamente, qual o seu número médio diário de vendas?

EXERCÍCIO 8

Estima-se que 70% dos acidentes rodoviários, estejam relacionados, direta ou indiretamente com as más condições da rede rodoviária nacional.

Qual a probabilidade de em 8 acidentes,

a) 5 estarem relacionados com o mau estado das estradas?

b) entre 3 e 6 estarem relacionadas com o mau estado das estradas?

EXERCÍCIO 9

Um estudo encomendado pela empresa *M*, permitiu apurar que aproximadamente 60% dos seus trabalhadores mantinham uma atitude cooperativa face à empresa, 30% uma atitude hostil e 10% uma atitude não definida.

Qual a probabilidade de num grupo de 12 trabalhadores:

a) Pelo menos 6 adotarem uma atitude hostil face à empresa?

b) No mínimo 2 terem uma atitude bem definida?

c) Qual o número esperado de trabalhadores com atitude hostil?

EXERCÍCIO 10

A máquina 1, produz (por dia), o dobro de peças que são produzidas pela máquina 2. No entanto, 6% das peças fabricadas pela máquina 1, tendem a ser defeituosas, enquanto somente 3%, o tendem a ser na máquina 2.

Qual a probabilidade de num lote de 10 peças extraídas ao acaso da produção total:

a) Haver 2 peças defeituosas?

b) Haver entre 2 e 5 (inclusive), peças defeituosas?

c) Qual o número esperado de peças defeituosas num lote de 100?

EXERCÍCIO 11

Considere o lançamento de 1 moeda equilibrada.

Calcule a probabilidade de, em 6 lançamentos:

a) Saírem 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 coroas.
b) Saírem no máximo 4 coroas.
c) Qual o número esperado de coroas nos 6 lançamentos?
d) Represente a função de probabilidade da V.A. em questão.

R: *a)* 0,0156; 0,0938; 0,2344; 0,3125; 0,2344; 0,0938; 0,0156.
b) 0,8906.
c) 3.

EXERCÍCIO 12

Uma agência de publicidade, afirma que 40% das donas de casa que recebem a visita de um vendedor de enciclopédia, acabam por encomendar uma.

De 12 donas de casa que recebem a visita do vendedor, qual a probabilidade de:

a) No máximo 3 encomendarem a enciclopédia?
b) No mínimo 5 encomendarem a enciclopédia?
c) Se o vendedor numa semana, conseguir abordar 100 donas de casa, quantas enciclopédias espera ele vender?

R: *a)* 0,2254; *b)* 0,5618; *c)* 40.

EXERCÍCIO 13

Suponha que X tem distribuição binomial e que $p = 0{,}2$ e $E[X] = 1$.

Calcule n e VAR$[X]$.

R: $n = 5$; $VAR[X] = 0{,}8$.

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS

Volume II
DISTRIBUIÇÕES
INFERÊNCIA ESTATÍSTICA

António Robalo
Professor Catedrático
ISCTE Business School – ISCTE-IUL

Maria do Carmo Botelho
Professora Auxiliar
Escola de Sociologia e Políticas Públicas – ISCTE-IUL
Investigadora CIES-IUL

Exercícios propostos e resolvidos. O cuidado posto na selecção e apresentação dos exercícios faz deste livro um elemento indispensável a uma boa compreensão e consolidação dos conhecimentos teóricos adquiridos.

As resoluções encontram-se explicadas passo a passo e com o respectivo enquadramento teórico.

Sínteses teóricas em todos os capítulos constituem uma mais valia adicional nesta sexta edição.

ISBN 978-972-618-936-7
9 789726 189367
117