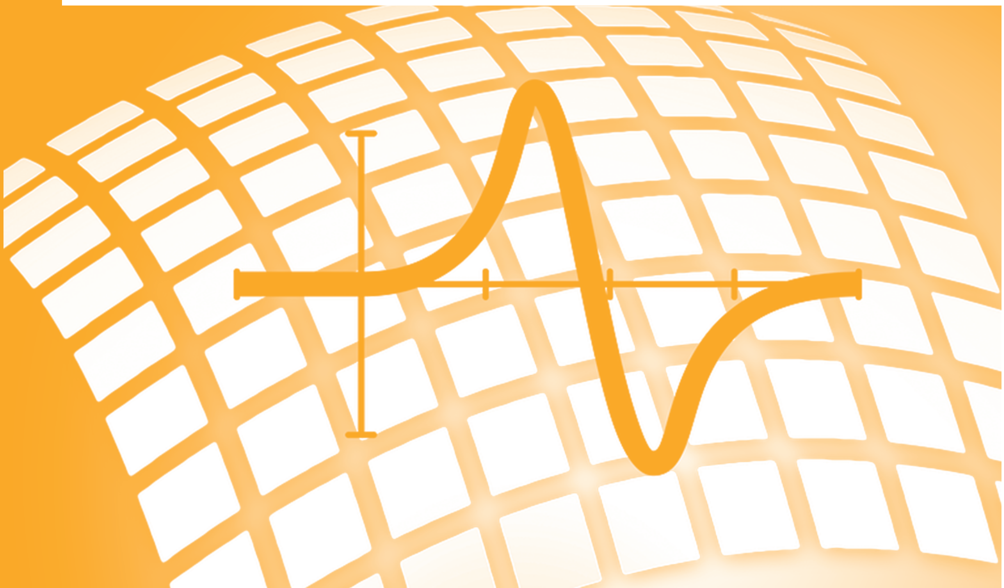
25

MATEMÁTICA

PRIMITIVAS E INTEGRAIS

COM APLICAÇÕES ÀS CIÊNCIAS EMPRESARIAIS

CARLA MARTINHO • ANA JORGE
MANUEL MARTINS • PATRÍCIA ENGRÁCIA • JOSÉ ESTRELA



EDIÇÕES SÍLABO

Coleção
Matemática

COLEÇÃO MATEMÁTICA

25

COLEÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n

3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS

4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA

5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

8 – CÁLCULO INTEGRAL EM *IR* – PRIMITIVAS

9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS

10 – SUCESSÕES E SÉRIES

11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM *IR*

13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS

14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS

16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES

17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS

18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA

20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação

21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações

22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos

23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n

24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS

25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais

Primitivas e Integrais

Com Aplicações às Ciências Empresariais

CARLA MARTINHO ANA JORGE MANUEL MARTINS
PATRÍCIA ENGRÁCIA JOSÉ ESTRELA

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

Editor: Manuel Robalo

FICHA TÉCNICA:

Título: Primitivas e Integrais – Com Aplicações às Ciências Empresariais
Autores: Carla Martinho, Ana Jorge, Manuel Martins, Patrícia Engrácia, José Estrela

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2016.
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 405159/16
ISBN: 978-972-618-838-4

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Tel.: 218130345
Fax: 218166719
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

Introdução

Este texto destina-se a todos os estudantes que nalgum momento do seu percurso de aprendizagem, ensino secundário ou superior, necessitem aprender a primitivar e a integrar. Muitos dos estudantes gostam de resolver vários exercícios para ganhar destreza e se sentirem mais seguros, por isso se optou por um conjunto alargado de exercícios resolvidos.

Não faria, no entanto, sentido que esses exercícios fossem apresentados sem um enquadramento teórico, ainda que sucinto. Por isso, todos os tópicos se iniciam com os conceitos necessários aos exemplos e exercícios resolvidos que imediatamente os precedem, bem como os resultados mais relevantes dos mesmos.

Devido às constantes solicitações que os autores tinham por parte dos seus alunos, a primeira versão foi elaborada especificamente para as licenciaturas de Gestão e Finanças Empresariais, em forma de sebenta, servindo de apoio às aulas teórico-práticas, pelo que os exercícios aplicados surgem na área das ciências empresariais, sendo por vezes necessários definir brevemente um ou outro conceito não matemático.

Os autores esperam, com este texto simples e muito aplicado, ir de encontro às necessidades dos estudantes e desta forma poder contribuir para desmistificar matérias nem sempre apreciadas por falta de compreensão da sua utilidade futura.

Como nota final, queremos deixar aqui um agradecimento especial aos nossos alunos do ISCAL pelo incentivo que nos deram para a publicação deste livro.

Capítulo 1

Primitivas e métodos de primitivação

Muitos são os casos concretos em que, sabendo taxa de variação instantânea ou derivada de uma determinada função, se quer determinar essa função específica. A função F que derivada resulta na função f diz-se a *primitiva* de f. Assim, a noção de primitiva está estreitamente relacionada com a noção de derivada.

Definição

Seja I um intervalo de IR e f uma função definida em I. Diz-se que f é primitivável em I se existir uma função $F : I \to IR$ tal que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Qualquer função F que verifique esta condição diz-se uma primitiva de f e pode denotar-se por $P(f)$, $\int f$ ou $\int f(x)\,dx$.

EXEMPLOS

A função nula definida por $f(x) = 0$, é primitivável em IR e as suas primitivas são as funções constantes, ou seja, $F(x) = k, \ \forall k \in IR$.

Algumas primitivas de $f(x) = 1$ são, por exemplo, x, $x + 2$, $x - \frac{1}{3}$, visto que $(x)' = (x+2)' = \left(x - \frac{1}{3}\right)' = 1$.

Analogamente, algumas primitivas de x^2 são, por exemplo, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{x^3}{3} + e$, pois $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + e\right)' = x^2$.

Teorema 1

Sendo $f : I \to IR$ uma função primitivável com primitiva F, então qualquer função $F + c$, com $c \in IR$ é primitiva de f. Ao conjunto de todas as primitivas de f chama-se **família das primitivas**.

Teorema 2

Sendo $f : I \to IR$ uma função primitivável com primitiva F em I, então qualquer outra primitiva de f em I, G, só difere de F por uma constante real, ou seja, $G = F + c$ com $c \in IR$.

Teorema 3

Sendo $f : I \to IR$ uma função primitivável e $a, b \in IR$, existe uma única primitiva F de f verificando a condição $F(a) = b$.

Teorema 4

Se f e g são duas funções primitiváveis no intervalo I, a sua soma $f + g$ também o é e

$$P(f + g) = P(f) + P(g)$$

Teorema 5

Se f é uma função primitivável no intervalo I e $k \in IR$, $k.f$ é também primitivável e

$$P(k.f) = kP(f)$$

1.1. Primitivas imediatas

1.1.1. Funções algébricas, potências, exponenciais e logarítmicas

Sejam f e g funções reais e $\alpha, k, c \in IR$.

Função Derivada f	**Função Primitiva Pf**
1	$x + c$
$f' + g'$	$f + g + c$
$(k\ f)'$	$k\ f + c$
$f^{\alpha} f', \quad \alpha \neq -1$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f \rvert + c$
$f' e^{f}$	$e^{f} + c$

Exercícios resolvidos

1 $P(x^2)$

Resolução:

$$P(x^2) = Px^2 = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c, \ c \in IR$$

2 $P(\sqrt{x})$

Resolução:

$$P\sqrt{x} = Px^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, \quad c \in IR$$

3 $P\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{1}{x^2}\right) = P(x^{-2}) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in IR$$

4 $P(x+1)^2$

Resolução:

$$P(x+1)^2 = \frac{(x+1)^3}{3} + c, \quad c \in IR$$

5 $P\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-2x}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{3}{\sqrt{1-2x}}\right) = 3P(1-2x)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{3}{2}P(-2 \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= -3\sqrt{1-2x} + c, \quad c \in IR$$

6 $P(\sqrt{x^2+1} \cdot x)$

Resolução:

$$P(\sqrt{x^2+1} \cdot x) = \frac{1}{2}P(2x\sqrt{x^2+1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} + c, \quad c \in IR$$

7 $P\left(\dfrac{5x}{3\sqrt[3]{x^2+3}}\right)$

Resolução:

$$P\left(\frac{5x}{3\sqrt[3]{x^2+3}}\right) = P\left(\frac{5}{3}x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{5}{6}P\left(2x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{(x^2+3)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right) + c =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{2}(x^2+3)^{\frac{2}{3}} + c =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + c, \quad c \in IR$$

8 $P(e^x)$

Resolução:

$$P(e^x) = e^x + c, \quad c \in IR$$

9 $P(e^{2x})$

Resolução:

$$Pe^{2x} = \frac{1}{2}P2e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in IR$$

10 $P(xe^{x^2})$

Resolução:

$$Pxe^{x^2} = \frac{1}{2}P2xe^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in IR$$

11 $P\left(\frac{1}{x}\right)$

Resolução:

$$P\frac{1}{x} = \ln|x| + c, \quad c \in IR$$

12 $P\left(\frac{2}{x}\right)$

Resolução:

$$P\frac{2}{x} = 2P\frac{1}{x} = 2\ln|x| + c, \quad c \in IR$$

13 $P\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

Resolução:

$$P\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c, \quad c \in IR$$

14 $P\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$

Resolução:

$$P\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}P\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + c, \quad c \in IR$$

15 $P\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$

Resolução:

$$P\frac{1}{x\ln x} = P\left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right) = \ln|\ln x| + c, \quad c \in IR$$

16 $P\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$

Resolução:

$$P\frac{\ln^2 x}{x} = P\left(\frac{1}{x}\ln^2 x\right) = \frac{\ln^3 x}{3} + c, \quad c \in IR$$

CARLA MARTINHO – Professora no ensino superior desde 1993, presentemente é Professora Adjunta no ISCAL-IPL. Licenciada em Matemática Aplicada às Ciências Atuariais pela FCT/UNL, é mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, ramo de Estatística, pelo ISEG-UL. É doutorada pela FCT-UNL e desenvolve investigação no CISCAL em metodologias quantitativas, métricas de avaliação, avaliação de desempenho e qualidade das organizações. É membro da SPM e da AEDEM.

ANA JORGE – Professora no ensino superior desde 1997, presentemente é Equiparada a Professora Adjunta no ISCAL-IPL. Licenciada em Probabilidades e Estatística pela FCUL, é mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, ramo de Estatística, pelo ISEG-UL. É doutoranda em Matemática na Universidade de Évora e desenvolve investigação na área da Previsão e da Otimização.

MANUEL MARTINS – Professor no ensino superior desde 1989, presentemente é Equiparado a Professor Adjunto no ISCAL-IPL. Licenciado em Matemática Aplicada – Ramo de Estatística e Investigação Operacional pela FCUL, possui o título de Especialista em Sistemas de Informação pelo IPL. Atualmente é também Assessor Técnico da Direção de Sistemas de Informação da empresa Infraestruturas de Portugal, SA.

PATRÍCIA ENGRÁCIA – Professora no ensino superior desde 2001, presentemente é Professora Auxiliar Convidada na Universidade Aberta. Licenciada em Matemática Aplicada e Computação pelo IST-UL, é doutorada pela FCUL em Matemática. Desenvolve investigação em Teoria da Demonstração e em Computação, tendo também desenvolvido trabalho em Física-Matemática. Atualmente é também formadora na Sociedade Portuguesa de Matemática.

JOSÉ ESTRELA – Professor no ensino superior desde 1987, presentemente é Professor Adjunto no ISCAL-IPL. Licenciado em Economia pelo ISEG-UL, Mestre em Transportes pelo IST/UL e possui o título de Especialista em Sistemas de Informação pelo IPL. Atualmente é também Técnico da Direção de Sistemas de Informação da empresa Comboios de Portugal, SA.

Este livro destina-se aos estudantes que nalgum momento do seu percurso de aprendizagem, ensino superior ou secundário, necessitem aprender a primitivar e a integrar.

A componente prática sob a forma de exercícios de aplicação, muito valorizada pelos estudantes, é acompanhada pela apresentação dos conceitos teóricos basilares necessários à compreensão das matérias apresentadas.

520

ISBN 978-972-618-838-4

9 789726 188384

25 COLEÇÃO MATEMÁTICA