

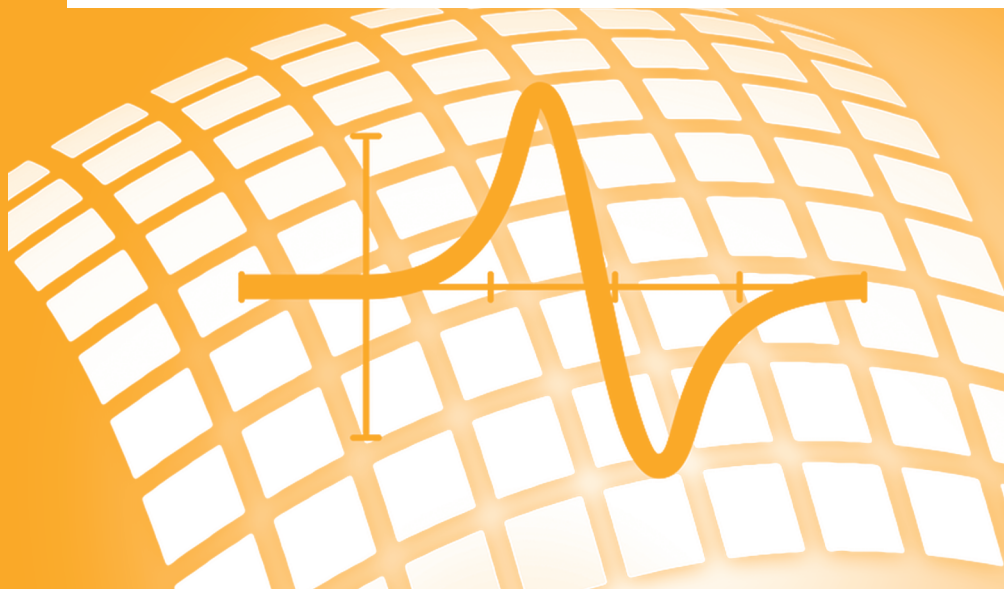
25

MATEMÁTICA

PRIMITIVAS E INTEGRAIS

COM APLICAÇÕES
ÀS CIÊNCIAS EMPRESARIAIS

CARLA MARTINHO • ANA JORGE
MANUEL MARTINS • PATRÍCIA ENGRÁCIA • JOSÉ ESTRELA



2ª Edição
Revista e Ampliada



EDIÇÕES SÍLABO

COLEÇÃO MATEMÁTICA

25

COLEÇÃO MATEMÁTICA

- 1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
- 2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}^n
- 3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS
- 4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
- 5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
- 6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
- 7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
- 8 – CÁLCULO INTEGRAL EM \mathbb{R} – PRIMITIVAS
- 9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS
- 10 – SUCESSÕES E SÉRIES
- 11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
- 12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}
- 13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM \mathbb{R}^n – EXERCÍCIOS
- 14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
- 15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS
- 16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES
- 17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS
- 18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE
- 19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA
- 20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação
- 21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações
- 22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos
- 23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM \mathbb{R}^n
- 24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS
- 25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais
- 26 – ÁLGEBRA LINEAR – Teoria e Prática

Primitivas e Integrais

**Com Aplicações
às Ciências Empresariais**

CARLA MARTINHO

ANA JORGE

MANUEL MARTINS

PATRÍCIA ENGRÁCIA

JOSÉ ESTRELA

EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro.

As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor.

Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos.

O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Primitivas e Integrais – Com Aplicações às Ciências Empresariais

Autores: Carla Martinho, Ana Jorge, Manuel Martins, Patrícia Engrácia, José Estrela

© Edições Sílabo, Lda.

Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2016.

2ª Edição – Lisboa, dezembro de 2019.

Impressão e acabamentos: ARTIPOL – Artes Tipográficas, Lda.

Depósito Legal: 464191/19

ISBN: 978-989-561-009-9



EDIÇÕES SÍLABO, Lda.

Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2

1170-100 Lisboa

Tel.: 218130345

e-mail: silabo@silabo.pt

www.silabo.pt

Índice

Introdução	7
-------------------	---

Capítulo 1

Primitivas e métodos de primitivação	9
1.1. Primitivas imediatas	13
1.1.1. Funções algébricas, potências, exponenciais e logarítmicas	13
Exercícios resolvidos	13
1.1.2. Funções trigonométricas	19
Exercícios resolvidos	19
1.2. Primitivação por decomposição	22
Exercícios resolvidos	22
1.3. Primitivação por partes	28
Exercícios resolvidos	29
1.4. Primitivação de funções racionais	36
Exercícios resolvidos	38
1.5. Primitivação por substituição	44
Exercícios resolvidos	45

Capítulo 2

Cálculo Integral	51
2.1. Noção de integral	53
2.2. Propriedades do integral definido	54
2.3. Teorema fundamental do cálculo integral e fórmula de Barrow	56

2.4. Métodos de integração	58
Exercícios resolvidos	59
2.5. Aplicações do cálculo integral – cálculo de áreas	74
Exercícios resolvidos	74
2.6. Aplicação do cálculo integral às ciências empresariais	81
2.7. Integrais Impróprios	97
2.7.1. Integrais de 1ª espécie – intervalo de integração ilimitado	97
2.7.2. Integrais impróprios de 2ª espécie	98
Exercícios resolvidos	98

Capítulo 3

Testes de auto-avaliação	105
Auto-avaliação 1	107
Auto-avaliação 2	107
Auto-avaliação 3	107
Resolução dos testes de auto-avaliação	108
Auto-avaliação 1	108
Auto-avaliação 2	111
Auto-avaliação 3	114
Bibliografia	119

Introdução

Este texto destina-se a todos os estudantes que nalgum momento do seu percurso de aprendizagem, ensino secundário ou superior, necessitem aprender a primitivar e a integrar. Muitos dos estudantes gostam de resolver vários exercícios para ganhar destreza e se sentirem mais seguros, por isso se optou por um conjunto alargado de exercícios resolvidos.

Não faria, no entanto, sentido que esses exercícios fossem apresentados sem um enquadramento teórico, ainda que sucinto. Por isso, todos os tópicos se iniciam com os conceitos necessários aos exemplos e exercícios resolvidos que imediatamente os precedem, bem como os resultados mais relevantes dos mesmos.

Devido às constantes solicitações que os autores tinham por parte dos seus alunos, a primeira versão foi elaborada especificamente para as licenciaturas de Gestão e Finanças Empresariais, em forma de sebenta, servindo de apoio às aulas teórico-práticas, pelo que os exercícios aplicados surgem na área das ciências empresariais, sendo por vezes necessários definir brevemente um ou outro conceito não matemático.

Os autores esperam, com este texto simples e muito aplicado, ir de encontro às necessidades dos estudantes e desta forma poder contribuir para desmistificar matérias nem sempre apreciadas por falta de compreensão da sua utilidade futura.

Como nota final, queremos deixar aqui um agradecimento especial aos nossos alunos do ISCAL pelo incentivo que nos deram para a publicação deste livro.

Capítulo 1

Primitivas e métodos de primitivação

Muitos são os casos concretos em que, sabendo taxa de variação instantânea ou a derivada de uma determinada função, se quer determinar essa função específica. A função F que derivada resulta na função f diz-se a *primitiva* de f . Assim, a noção de primitiva está estreitamente relacionada com a noção de derivada.

Definição

Seja I um intervalo de \mathbb{R} e f uma função definida em I . Diz-se que f é primitivável em I se existir uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Qualquer função F que verifique esta condição diz-se uma primitiva de f e pode denotar-se por $P(f)$, $\int f$ ou $\int f(x) dx$.

■ EXEMPLOS

A função nula definida por $f(x) = 0$, é primitivável em \mathbb{R} e as suas primitivas são as funções constantes, ou seja, $F(x) = k, \forall k \in \mathbb{R}$.

Algumas primitivas de $f(x) = 1$ são, por exemplo, $x, x + 2, x - \frac{1}{3}$, visto que

$$(x)' = (x + 2)' = \left(x - \frac{1}{3}\right)' = 1.$$

Analogamente, algumas primitivas de x^2 são, por exemplo, $\frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}, \frac{x^3}{3} + e$, pois

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + e\right)' = x^2.$$

Teorema 1

Sendo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável com primitiva F , então qualquer função $F + c$, com $c \in \mathbb{R}$ é primitiva de f . Ao conjunto de todas as primitivas de f chama-se **família das primitivas**.

Teorema 2

Sendo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável com primitiva F em I , então qualquer outra primitiva de f em I , G , só difere de F por uma constante real, ou seja, $G = F + c$ com $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 3

Sendo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função primitivável e $a, b \in \mathbb{R}$, existe uma única primitiva F de f verificando a condição $F(a) = b$.

Teorema 4

Se f e g são duas funções primitiváveis no intervalo I , a sua soma $f + g$ também o é e

$$P(f + g) = P(f) + P(g)$$

Teorema 5

Se f é uma função primitivável no intervalo I e $k \in \mathbb{R}$, $k.f$ é também primitivável e

$$P(k.f) = kP(f)$$

1.1. Primitivas imediatas

1.1.1. Funções algébricas, potências, exponenciais e logarítmicas

Sejam f e g funções reais e $\alpha, k, c \in \mathbb{R}$.

Função Derivada f'	Função Primitiva Pf
1	$x + c$
$f' + g'$	$f + g + c$
$(k f)'$	$k f + c$
$f^\alpha f'$, $\alpha \neq -1$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\frac{f'}{f}$	$\ln f + c$
$f' e^f$	$e^f + c$

Exercícios resolvidos

1 $P(x^2)$

Resolução:

$$P(x^2) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$$

2 $P(\sqrt{x})$

Resolução:

$$P\sqrt{x} = P x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{3} \quad P\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Resolução:

$$P\left(\frac{1}{x^2}\right) = P(x^{-2}) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{4} \quad P(x+1)^2$$

Resolução:

$$P(x+1)^2 = \frac{(x+1)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{5} \quad P\left(\frac{3}{\sqrt{1-2x}}\right)$$

Resolução:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{\sqrt{1-2x}}\right) &= 3P(1-2x)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= -\frac{3}{2}P(-2 \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \\ &= -3\sqrt{1-2x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\mathbf{6} \quad P(\sqrt{x^2+1} \cdot x)$$

Resolução:

$$\begin{aligned} P(\sqrt{x^2+1} \cdot x) &= \frac{1}{2}P(2x\sqrt{x^2+1}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x^2+1)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



CARLA MARTINHO – Professora no ensino superior desde 1993, presentemente é Professora Adjunta no ISCAL-IPL. Licenciada em Matemática Aplicada às Ciências Actuais pela FCT/UNL, é mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, ramo de Estatística, pelo ISEG-UL. É doutorada pela FCT-UNL e desenvolve investigação em metodologias quantitativas, métricas de avaliação, avaliação de desempenho e qualidade das organizações. É membro da SPM, da SPE, da FORGES e da AEDEM.



ANA JORGE – Professora no ensino superior desde 1997, presentemente é Equiparada a Professora Adjunta no ISCAL-IPL. Licenciada em Probabilidades e Estatística pela FCUL, é mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, ramo de Estatística, pelo ISEG-UL. É doutoranda em Matemática na Universidade de Évora e desenvolve investigação na área da Previsão e da Otimização.



MANUEL MARTINS – Professor no ensino superior desde 1989, presentemente é Equiparado a Professor Adjunto no ISCAL-IPL. Licenciado em Matemática Aplicada – Ramo de Estatística e Investigação Operacional pela FCUL, possui o título de Especialista em Sistemas de Informação pelo IPL. Atualmente é também Assessor Técnico da Direção de Sistemas de Informação da empresa Infraestruturas de Portugal, SA.



PATRÍCIA ENGRÁCIA – Professora no ensino superior desde 2001, presentemente é Investigadora na Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência e Professora Auxiliar Convivida na Universidade Aberta. Licenciada em Matemática Aplicada e Computação pelo IST-UL, é doutorada pela FCUL em Matemática. Desenvolve investigação em Estatística e em Teoria da Demonstração e em Computação, tendo também desenvolvido trabalho em Física-Matemática. Atualmente é também formadora na Sociedade Portuguesa de Matemática.



JOSÉ ESTRELA – Professor no ensino superior desde 1987, presentemente é Professor Adjunto no ISCAL-IPL. Licenciado em Economia pelo ISEG-UL, Mestre em Transportes pelo IST/UL e possui o título de Especialista em Sistemas de Informação pelo IPL. Atualmente é também Técnico da Direção de Sistemas de Informação da empresa Comboios de Portugal, SA.

Este livro destina-se aos estudantes que nalgum momento do seu percurso de aprendizagem, ensino superior ou secundário, necessitem aprender a primitivar e a integrar.

A componente prática sob a forma de exercícios de aplicação, muito valorizada pelos estudantes, é acompanhada pela apresentação dos conceitos teóricos basilares necessários à compreensão das matérias apresentadas.

520



25

COLEÇÃO MATEMÁTICA